

# Kapitel 7

## Funktionentheorie

In diesem Kapitel geht es meistens um Funktionen, die auf einem Gebiet  $G \subseteq \mathbb{C}$  definiert sind und komplexe Werte annehmen. Nach Lust, Laune und Bedarf wird  $\mathbb{C}$  mit  $\mathbb{R}^2$  identifiziert, einer komplexen Zahl  $z = x + iy$  entspricht dann der Punkt  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ .

### 7.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

#### 1. Definitionen

Eine Funktion  $u : G \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  ist harmonisch, falls  $u$  partiell nach allen Variablen zweimal differenzierbar ist und die Summe aller zweifachen partiellen Ableitungen nach einer Variablen gleich null ist, d.h. harmonisch

$$\Delta u = \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u = 0$$

Eine auf  $G \subseteq \mathbb{R}^2$  oder  $G \subseteq \mathbb{C}$  definierte reelle Funktion  $u$  ist also harmonisch, falls

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ist  $f$  eine Funktion, die auf  $G \subseteq \mathbb{C}$  definiert ist und die komplexe Werte annimmt, so schreibt man

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

$u$  und  $v$  sind dabei reellwertige Funktionen und heißen Real- bzw. Imaginärteil von  $f$ . Real- und  
Imaginärteil

$f$  heißt in  $z_0 \in G$  komplex differenzierbar, wenn  $f'(z_0) := \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$  existiert.  $f'(z_0)$

$\partial, \bar{\partial}$  Dies ist gleichbedeutend mit  $\bar{\partial}f = \frac{\partial}{\partial \bar{z}}f = 0$ . Dabei ist

$$\partial = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad \text{und} \quad \bar{\partial} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

Viel wichtiger ist der Begriff der Holomorphie, der gleichbedeutend mit komplexer Differenzierbarkeit in einem Gebiet  $G$  ist:

holomorph  $f = u + iv$  ist holomorph in  $G$ .

$\Leftrightarrow$  Für alle  $z_0 \in G$  existiert  $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$ ,  
d.h.  $f$  ist in jedem Punkt  $z_0 \in G$  komplex differenzierbar.

$\Leftrightarrow f$  ist in jedem Punkt  $z_0 \in G$  unendlich oft komplex differenzierbar.

C.-R.-Dgl.  $\Leftrightarrow u$  und  $v$  sind als Funktionen von  $x$  und  $y$  differenzierbar und in  $G$  gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (C.-R.-Dgl.):

$$u_x = v_y \quad \text{und} \quad u_y = -v_x.$$

$\Leftrightarrow f$  ist in  $G$  reell diff'bar und  $\bar{\partial}f = 0$ .

$\Leftrightarrow f$  ist in jedem Punkt  $z_0$  von  $G$  in eine konvergente Potenzreihe  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$  entwickelbar.

Auf sternförmigen bzw. einfach zusammenhängenden Gebieten ist dies außerdem äquivalent zu

$\Leftrightarrow f$  hat eine Stammfunktion, d.h. es gibt eine Funktion  $F$  mit  $F'(z) = f(z)$ .

$\Leftrightarrow f$  ist stetig und für jede in  $G$  verlaufende stückweise glatte geschlossene Kurve  $C$  ist  $\oint_C f(z) dz = 0$ .

$\Leftrightarrow \int_C f(z) dz$  hängt nur von Anfangs- und Endpunkt einer stückweise glatten Kurve  $C$  und nicht von deren Verlauf ab.

Andere Sprechweisen für "holomorph" sind "analytisch", "regulär analytisch" und "regulär".

Beispiele holomorpher Funktionen Holomorph sind z.B. alle Polynome und gebrochen rationalen Funktionen in  $z$ , Potenzreihen, die bekannten elementaren Funktionen wie  $\sin z$ ,  $\cos z$ ,  $e^z$  und daraus zusammengesetzte in ihrem Definitionsbereich. (vgl. Abschnitt 2)

Nicht holomorph (obwohl fast überall reell differenzierbar) sind z.B.  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$  (Real- und Imaginärteil),  $|z|$ ,  $\bar{z} = x - iy$ .

Beispiele nicht holomorpher Funktionen

Ist  $f = u + iv$  eine holomorphe Funktion, so sind  $u$  und  $v$  harmonisch. Bezeichnung:  $u$  und  $v$  nennt man konjugiert harmonische Funktionen.

konjugiert harmonisch

## 2. Berechnung

### Holomorphie

Rechenregeln

Die Rechenregeln für komplexe Differentiation sind genau dieselben wie im Reellen: Summen-, Produkt-, Quotienten- und Kettenregel können wörtlich übernommen werden, bei der Berechnung von Limiten von Quotienten holomorpher Funktionen kann die Regel von l'Hospital angewendet werden.

Ist  $f = u + iv$ , so ist  $f' = \partial f = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y$ .

Ist  $f$  durch eine Potenzreihe dargestellt, so erhält man  $f'$  durch gliedweises Ableiten:

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n \\ f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z - z_0)^n \\ f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) c_n (z - z_0)^{n-k} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \cdots (n+1) c_{n+k} (z - z_0)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} (z - z_0)^n \end{aligned}$$

**Beispiel 1:** Die Reihe der zweiten Ableitung von  $ze^z$ .

Die Potenzreihe von  $f(z) = ze^z$  erhält man aus der  $e^z$ -Reihe:

$$ze^z = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}$$

Es ist also  $c_0 = 0$  und  $c_n = \frac{1}{(n-1)!}$  für  $n > 0$ . Bei der Reihe der Ableitung kommt  $c_0$  nicht mehr vor.

$$(ze^z)'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} c_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \frac{z^n}{(n-1+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} z^n.$$

### Harmonische Funktionen

$u$  harmonisch?

Um nachzuweisen, daß eine gegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion  $u$  harmonisch ist, rechnet man entweder  $\Delta u = 0$  nach oder identifiziert  $u$  als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Nützliche Formel zur Berechnung der zweiten Ableitungen:

$$(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.$$

Ist  $u$  eine harmonische Funktion, so läßt sich auf geeigneten Gebieten  $G$  eine holomorphe Funktion  $f$  bestimmen, so daß  $f = u + iv$  ist:

Bestimmung  
einer  
konjugiert  
harmonischen  
Funktion

- ①  $v$  bestimmt man aus den C.-R.-Dgl.  $v_x = -u_y$ ,  $v_y = u_x$  mit den Methoden zur Bestimmung eines Potentials im  $\mathbb{R}^2$ , vgl. Kapitel 4.8.
- ②  $f = u + iv$  liegt dann bis auf eine rein imaginäre Konstante (aus  $iv$ ) fest. Diese wird gegebenenfalls bestimmt.
- ③  $f$  wird als Funktion in  $z$  geschrieben, indem sooft wie möglich  $x + iy$  zu  $z$  zusammengefaßt wird.  
Notfalls ersetzt man  $x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$  und  $y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$  und faßt zusammen. Alle  $\bar{z}$  müssen herausfallen.

Ist der Imaginärteil  $v$  gegeben, so geht man analog vor.

Eine holomorphe Funktion ist also durch Real- oder Imaginärteil bis auf eine Konstante festgelegt.

**Beispiel 2:** Zeigen Sie, daß  $u(x, y) = x^2 - y^2$  harmonisch ist, und bestimmen Sie eine zu  $u$  konjugiert harmonische Funktion  $v$  und  $u + iv$ .

Aus  $u_{xx} = 2$  und  $u_{yy} = -2$  folgt  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Damit ist  $u$  harmonisch.

- ① Aus  $u_x = 2x$  und  $u_y = -2y$  folgt  $v_x = -u_y = 2y$ ,  $v_y = u_x = 2x$ . Daraus folgt  $v(x, y) = 2xy + C$  (Hinguckmethode aus 4.8), man kann also etwa  $v = 2xy$  wählen.
- ② Es ist  $f = x^2 - y^2 + 2i xy$ .

- ③ Entweder erkennt man  $f(z) = (x + iy)^2$  oder man hat

$$f(z) = \frac{1}{4}(z+\bar{z})^2 - \frac{1}{-4}(z-\bar{z})^2 + \frac{2i}{4i}(z+\bar{z})(z-\bar{z}) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\bar{z}^2 + \frac{1}{2}(z^2 - \bar{z}^2) = z^2.$$

### 3. Beispiele

**Beispiel 3:** Ist  $u(x, y) = e^x \sin y$  harmonisch?

Nachzurechnen ist  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ . Das folgt direkt aus

$$u_{xx} = e^x \sin y, \quad u_{yy} = -e^x \sin y.$$

**Beispiel 4:** Eine holomorphe Funktion  $f$  mit Realteil  $u(x, y) = e^x \sin y$  und  $f(0) = 0$  soll bestimmt werden.

- ① Der Imaginärteil  $v$  von  $f$  wird aus den C.-R.-Dgl.  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$  bestimmt: mit

$$u_x = e^x \sin y \quad \text{und} \quad u_y = e^x \cos y$$

muß für  $v$  gelten

$$v_x = -u_y = -e^x \cos y, \quad \text{also} \quad v(x, y) = -e^x \cos y + C(y).$$

Aus  $v_y = u_x$  folgt

$$v_y = e^x \sin y + C'(y) \stackrel{!}{=} u_x = e^x \sin y$$

und damit  $C'(y) = 0$ , also  $C(y) = C$ ,  $C \in \mathbb{R}$ . Es ist also

$$v(x, y) = -e^x \cos y + C \quad \text{und} \quad f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \sin y - ie^x \cos y + iC.$$

- ② Aus  $f(0) = 0$  folgt  $C = 1$  und  $f(z) = e^x(\sin y - i \cos y) + i$ .
- ③ Um  $f$  als Funktion von  $z$  zu schreiben, benutzt man  $e^{iw} = \cos w + i \sin w$ :

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x(\sin y - i \cos y) + i = -ie^x(\cos y + i \sin y) + i \\ &= -ie^x e^{iy} + i = -ie^{x+iy} + i = i(1 - e^z). \end{aligned}$$

**Beispiel 5:** Untersuchen Sie die Funktion

$$f(z) = f(x + iy) = \sin x \sin y - i \cos x \cos y \text{ auf Holomorphie.}$$

Es ist

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \sin x \sin y, & u_x &= \cos x \sin y, & u_y &= \sin x \cos y, \\ v(x, y) &= -\cos x \cos y, & v_y &= \cos x \sin y, & v_x &= \sin x \cos y. \end{aligned}$$

Die erste C.-R.-Dgl.  $u_x = v_y$  ist überall in  $\mathbb{C}$  erfüllt, die zweite  $u_y = -v_x$  gilt aber nur für  $\sin x \cos y = 0$ . Das gilt auf dem Gitter mit  $x = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  und  $y = (n + 1/2)\pi$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Da kein Teil dieser Menge offen ist (es ist ja kein noch so kleiner Kreis in den Gitterlinien enthalten), ist  $f$  nirgends holomorph.

**Beispiel 6:** Untersuchen Sie die Funktion  $f(z) = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$  auf Holomorphie.

**1. Möglichkeit:** Wegen  $|z|^2 = z\bar{z}$  ist  $f(z) = \frac{\bar{z}}{z\bar{z}} = \frac{1}{z}$ .  $f$  ist als gebrochen rationale Funktion in  $z$  überall dort holomorph, wo  $f$  definiert ist, d.h. in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ .

Bemerkung:  $f$  ist in der gegebenen Form keine Zusammensetzung holomorpher Funktionen, da weder  $g(z) = \bar{z}$  noch  $h(z) = |z|$  für sich holomorph sind.

**2. Möglichkeit:** Mit  $\bar{z} = x - iy$  wird  $f$  in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i \frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

$$\text{mit } u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

$u$  und  $v$  sind in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  definiert. Die Überprüfung auf Holomorphie erfolgt durch Nachrechnen der C.-R.-Dgl.:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\ v_y &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = u_x \\ u_y &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\ -v_x &= \frac{(-y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = u_y \end{aligned}$$

Die C.-R.-Dgl. sind also in  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$  erfüllt, und  $f$  ist dort holomorph.

**3. Möglichkeit:** Beim Nachrechnen von  $\bar{\partial}f = 0$  werden die C.-R.-Dgl. zusammengefaßt:

$$\begin{aligned} \bar{\partial}f &= \bar{\partial} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{x^2 + y^2 - (x - iy) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + i \frac{-i(x^2 + y^2) - (x - iy) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \frac{y^2 - x^2 + 2ixy + x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} = 0. \end{aligned}$$