Kapitel 7

Funktionentheorie

In diesem Kapitel geht es meistens um Funktionen, die auf einem Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ definiert sind und komplexe Werte annehmen. Nach Lust, Laune und Bedarf wird $\mathbb{C}$ mit $\mathbb{R}^2$ identifiziert, einer komplexen Zahl $z = x + iy$ entspricht dann der Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

7.1 Holomorphe und harmonische Funktionen

1. Definitionen

Eine Funktion $u : G \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist harmonisch, falls u partiell nach allen Variablen zweimal differenzierbar ist und die Summe aller zweifachen partiellen Ableitungen nach einer Variablen gleich null ist, d.h.

harmonisch

$$\Delta u = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} \right) u = 0$$

Eine auf $G \subseteq \mathbb{R}^2$ oder $G \subseteq \mathbb{C}$ definierte reelle Funktion u ist also harmonisch, falls

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ist f eine Funktion, die auf $G \subseteq \mathbb{C}$ definiert ist und die komplexe Werte annimmt, so schreibt man

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

u und v sind dabei reellwertige Funktionen und heißen Real- bzw. Imaginärteil von f.

Real- und Imaginärteil

f heißt in $z_0 \in G$ komplex differenzierbar, wenn $f'(z_0) := \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$ existiert.

$f'(z_0)$

$\partial, \overline{\partial}$ Dies ist gleichbedeutend mit $\overline{\partial} f = \frac{\partial}{\partial \overline{z}} f = 0$. Dabei ist

$$\partial = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) \quad \text{und} \quad \overline{\partial} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Viel wichtiger ist der Begriff der Holomorphie, der gleichbedeutend mit komplexer Differenzierbarkeit in einem Gebiet G ist:

holomorph $f = u + iv$ ist holomorph in G.

$\Leftrightarrow$ Für alle $z_0 \in G$ existiert $\lim\limits_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} =: f'(z_0)$, d.h. f ist in jedem Punkt $z_0 \in G$ komplex differenzierbar.

$\Leftrightarrow$ f ist in jedem Punkt $z_0 \in G$ unendlich oft komplex differenzierbar.

C.-R.-Dgl. $\Leftrightarrow$ u und v sind als Funktionen von x und y differenzierbar und in G gelten die Cauchy-Riemann-Differentialgleichungen (C.-R.-Dgl.):

$$u_x = v_y \qquad \text{und} \qquad u_y = -v_x.$$

$\Leftrightarrow$ f ist in G reell diff'bar und $\overline{\partial} f = 0$.

$\Leftrightarrow$ f ist in jedem Punkt z_0 von G in eine konvergente Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ entwickelbar.

Auf sternförmigen bzw. einfach zusammenhängenden Gebieten ist dies außerdem äquivalent zu

$\Leftrightarrow$ f hat eine Stammfunktion, d.h. es gibt eine Funktion F mit $F'(z) = f(z)$.

$\Leftrightarrow$ f ist stetig und für jede in G verlaufende stückweise glatte geschlossene Kurve C ist $\oint_C f(z)\,dz = 0$.

$\Leftrightarrow$ $\int_C f(z)\,dz$ hängt nur von Anfangs- und Endpunkt einer stückweise glatten Kurve C und nicht von deren Verlauf ab.

Andere Sprechweisen für "holomorph" sind " analytisch", "regulär analytisch" und "regulär".

Beispiele holomorpher Funktionen Holomorph sind z.B. alle Polynome und gebrochen rationalen Funktionen in z, Potenzreihen, die bekannten elementaren Funktionen wie $\sin z$, $\cos z$, e^z und daraus zusammengesetzte in ihrem Definitionsbereich. (vgl. Abschnitt 2)

Beispiele nicht holomorpher Funktionen

Nicht holomorph (obwohl fast überall reell differenzierbar) sind z.B. $\mathrm{Re}(z)$, $\mathrm{Im}(z)$ (Real- und Imaginärteil), $|z|$, $\overline{z} = x - iy$.

konjugiert harmonisch

Ist $f = u + iv$ eine holomorphe Funktion, so sind u und v harmonisch. Bezeichnung: u und v nennt man konjugiert harmonische Funktionen.

2. Berechnung

Holomorphie

Rechenregeln

Die Rechenregeln für komplexe Differentiation sind genau dieselben wie im Reellen: Summen-, Produkt,- Quotienten- und Kettenregel können wörtlich übernommen werden, bei der Berechnung von Limiten von Quotienten holomorpher Funktionen kann die Regel von l'Hospital angewendet werden.

Ist $f = u + iv$, so ist $f' = \partial f = u_x + iv_x = u_x - iu_y = v_y + iv_x = v_y - iu_y$.

Ist f durch eine Potenzreihe dargestellt, so erhält man f' durch gliedweises Ableiten:

$$\begin{aligned}
f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-z_0)^n \\
f'(z) &= \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z-z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z-z_0)^n \\
f^{(k)}(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1) c_n (z-z_0)^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1)\cdots(n+1) c_{n+k} (z-z_0)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} c_{n+k} (z-z_0)^n
\end{aligned}$$

Beispiel 1: Die Reihe der zweiten Ableitung von ze^z.

Die Potenzreihe von $f(z) = ze^z$ erhält man aus der e^z-Reihe:

$$ze^z = z \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{(n-1)!}.$$

Es ist also $c_0 = 0$ und $c_n = \dfrac{1}{(n-1)!}$ für $n > 0$. Bei der Reihe der Ableitung kommt c_0 nicht mehr vor.

$$(ze^z)'' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} c_{n+2} z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!} \frac{z^n}{(n-1+2)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+2}{n!} z^n.$$

Harmonische Funktionen

u harmonisch?

Um nachzuweisen, daß eine gegebene zweimal stetig differenzierbare Funktion u harmonisch ist, rechnet man entweder $\Delta u = 0$ nach oder identifiziert u als Real- oder Imaginärteil einer holomorphen Funktion. Nützliche Formel zur Berechnung der zweiten Ableitungen:

$$\boxed{(fg)'' = f''g + 2f'g' + fg''.}$$

Bestimmung einer konjugiert harmonischen Funktion

Ist u eine harmonische Funktion, so läßt sich auf geeigneten Gebieten G eine holomorphe Funktion f bestimmen, so daß $f = u + iv$ ist:

① v bestimmt man aus den C.-R.-Dgl. $v_x = -u_y, \quad v_y = u_x$ mit den Methoden zur Bestimmung eines Potentials im $\mathbb{R}^2$, vgl. Kapitel 4.8.

② $f = u + iv$ liegt dann bis auf eine rein imaginäre Konstante (aus iv) fest. Diese wird gegebenenfalls bestimmt.

③ f wird als Funktion in z geschrieben, indem sooft wie möglich $x + iy$ zu z zusammengefaßt wird.

Notfalls ersetzt man $x = \frac{1}{2}(z + \overline{z})$ und $y = \frac{1}{2i}(z - \overline{z})$ und faßt zusammen. Alle $\overline{z}$ müssen herausfallen.

Ist der Imaginärteil v gegeben, so geht man analog vor.

Eine holomorphe Funktion ist also durch Real- oder Imaginärteil bis auf eine Konstante festgelegt.

Beispiel 2: Zeigen Sie, daß $u(x, y) = x^2 - y^2$ harmonisch ist, und bestimmen Sie eine zu u konjugiert harmonische Funktion v und $u + iv$.

Aus $u_{xx} = 2$ und $u_{yy} = -2$ folgt $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Damit ist u harmonisch.

① Aus $u_x = 2x$ und $u_y = -2y$ folgt $v_x = -u_y = 2y$, $v_y = u_x = 2x$. Daraus folgt $v(x, y) = 2xy + C$ (Hinguckmethode aus 4.8), man kann also etwa $v = 2xy$ wählen.

② Es ist $f = x^2 - y^2 + 2i\, xy$.

③ Entweder erkennt man $f(z) = (x+iy)^2$ oder man hat

$$f(z) = \frac{1}{4}(z+\overline{z})^2 - \frac{1}{-4}(z-\overline{z})^2 + \frac{2i}{4i}(z+\overline{z})(z-\overline{z}) = \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}\overline{z}^2 + \frac{1}{2}(z^2 - \overline{z}^2) = z^2.$$

3. Beispiele

Beispiel 3: Ist $u(x,y) = e^x \sin y$ harmonisch?

Nachzurechnen ist $u_{xx} + u_{yy} = 0$. Das folgt direkt aus

$$u_{xx} = e^x \sin y \quad , \quad u_{yy} = -e^x \sin y.$$

Beispiel 4: Eine holomorphe Funktion f mit Realteil $u(x,y) = e^x \sin y$ und $f(0) = 0$ soll bestimmt werden.

① Der Imaginärteil v von f wird aus den C.-R.-Dgl. $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ bestimmt: mit

$$u_x = e^x \sin y \quad \text{und} \quad u_y = e^x \cos y$$

muß für v gelten

$$v_x = -u_y = -e^x \cos y \quad , \text{also} \quad v(x,y) = -e^x \cos y + C(y).$$

Aus $v_y = u_x$ folgt

$$v_y = e^x \sin y + C'(y) \overset{!}{=} u_x = e^x \sin y$$

und damit $C'(y) = 0$, also $C(y) = C$, $C \in \mathbb{R}$. Es ist also

$$v(x,y) = -e^x \cos y + C \quad \text{und} \quad f(z) = u(x,y) + iv(x,y) = e^x \sin y - ie^x \cos y + iC.$$

② Aus $f(0) = 0$ folgt $C = 1$ und $f(z) = e^x(\sin y - i\cos y) + i$.

③ Um f als Funktion von z zu schreiben, benutzt man $e^{iw} = \cos w + i \sin w$:

$$\begin{aligned} f(z) &= e^x(\sin y - i\cos y) + i = -ie^x(\cos y + i\sin y) + i \\ &= -ie^x e^{iy} + i = -ie^{x+iy} + i = i(1 - e^z). \end{aligned}$$

Beispiel 5: Untersuchen Sie die Funktion
$f(z) = f(x+iy) = \sin x \, \sin y - i\cos x \, \cos y$ auf Holomorphie.

Es ist

$$u(x,y) = \sin x \, \sin y, \quad u_x = \cos x \, \sin y, \quad u_y = \sin x \, \cos y,$$

$$v(x,y) = -\cos x \, \cos y, \quad v_y = \cos x \, \sin y, \quad v_x = \sin x \, \cos y.$$

Die erste C.-R.-Dgl. $u_x = v_y$ ist überall in $\mathbb{C}$ erfüllt, die zweite $u_y = -v_x$ gilt aber nur für $\sin x \cos y = 0$. Das gilt auf dem Gitter mit $x = k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ und $y = (n + 1/2)\pi$, $n \in \mathbb{Z}$. Da kein Teil dieser Menge offen ist (es ist ja kein noch so kleiner Kreis in den Gitterlinien enthalten), ist f nirgends holomorph.

Beispiel 6: Untersuchen Sie die Funktion $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$ auf Holomorphie.

1. Möglichkeit: Wegen $|z|^2 = z\overline{z}$ ist $f(z) = \dfrac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \dfrac{1}{z}$. f ist als gebrochen rationale Funktion in z überall dort holomorph, wo f definiert ist, d.h. in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Bemerkung: f ist in der gegebenen Form keine Zusammensetzung holomorpher Funktionen, da weder $g(z) = \overline{z}$ noch $h(z) = |z|$ für sich holomorph sind.

2. Möglichkeit: Mit $\overline{z} = x - iy$ wird f in Real- und Imaginärteil zerlegt:

$$f(z) = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{-y}{x^2 + y^2} = u + iv$$

$$\text{mit} \quad u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} \quad \text{und} \quad v(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}.$$

u und v sind in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ definiert. Die Überprüfung auf Holomorphie erfolgt durch Nachrechnen der C.-R.-Dgl.:

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{x^2 + y^2 - x \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \\
v_y &= \frac{-(x^2 + y^2) + y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} = u_x \\
u_y &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} \\
-v_x &= \frac{(-y) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} = u_y
\end{aligned}$$

Die C.-R.-Dgl. sind also in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ erfüllt, und f ist dort holomorph.

3. Möglichkeit: Beim Nachrechnen von $\overline{\partial} f = 0$ werden die C.-R.-Dgl. zusammengefaßt:

$$\begin{aligned}
\overline{\partial} f &= \overline{\partial} \frac{x - iy}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right)\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2 + y^2 - (x - iy) \cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} + i\frac{-i(x^2 + y^2) - (x - iy) \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2}\right\} \\
&= \frac{1}{2}\,\frac{y^2 - x^2 + 2ixy \; + \; x^2 - y^2 - 2ixy}{(x^2 + y^2)^2} \; = \; 0.
\end{aligned}$$