

Dieser Artikel behandelt einige Interpolationsverfahren.

Numerische Verfahren kann man nur mit der dazugehörigen Theorie verstehen und anwenden. Daher sind hier auch Theorie-Anteile und Beweise enthalten. Zur Abgrenzung von den Algorithmen sind sie in kleinerer Schrift gesetzt.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Definition: Interpolationsproblem</b>	<b>2</b>
1.1	Problemstellung . . . . .	2
1.2	Eigenschaften . . . . .	2
1.3	Varianten . . . . .	2
<b>2</b>	<b>Interpolationspolynom - Lagrangedarstellung</b>	<b>2</b>
2.1	Konstruktion des Interpolationspolynoms . . . . .	2
2.2	Beispiel . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Newtondarstellung und Neville-Algorithmus - Theorie</b>	<b>3</b>
3.1	Konstruktion von Interpolationspolynomen . . . . .	3
3.2	Interpolationspolynom . . . . .	5
3.3	Neville-Algorithmus . . . . .	5
3.4	Newton-Darstellung . . . . .	5
3.5	Dividierte Differenzen . . . . .	6
<b>4</b>	<b>Durchführung des Newton-Verfahrens</b>	<b>6</b>
4.1	Algorithmus . . . . .	6
<b>5</b>	<b>Durchführung des Neville-Verfahrens</b>	<b>8</b>
5.1	Algorithmus . . . . .	8
<b>6</b>	<b>Fehlerabschätzung</b>	<b>9</b>
6.1	Definition: Interpolationsfehler . . . . .	9
6.2	Folgerung . . . . .	9
6.3	Definition und Eigenschaften . . . . .	10
6.4	Abschätzung des Interpolationsfehlers . . . . .	10
<b>7</b>	<b>Hermite-Interpolation</b>	<b>11</b>
7.1	Hermite-Interpolationsaufgabe . . . . .	11
7.2	Algorithmus . . . . .	12
<b>8</b>	<b>Beispiele</b>	<b>13</b>

# 1 Definition: Interpolationsproblem

## 1.1 Problemstellung

Gegeben seien  $n + 1$  Wertepaare  $(x_0, y_0)$ ,  $(x_1, y_1)$  bis  $(x_n, y_n)$ , wobei die  $x$ -Werte alle verschieden sein sollen.

Gesucht ist ein Polynom  $p$  höchstens  $n$ -ten Grades mit der Eigenschaft  $p(x_n) = y_n$ .

Die  $x_i$  werden oft als Knoten oder Stützstellen bezeichnet.

Dieses Polynom heißt Interpolationspolynom zu den Knoten  $x_0$  bis  $x_n$ .

Knoten  
Stützstelle  
Interpolations-  
polynom

## 1.2 Eigenschaften

Das Interpolationsproblem ist eindeutig lösbar.

Die Lösbarkeit wird im unten durch die Angabe einer Lösung bewiesen.

Die Eindeutigkeit der Lösung: Sind  $p$  und  $q$  zwei Lösungen des Problems, so hat das Polynom  $p - q$  höchstens den Grad  $n$  und die  $n + 1$  Nullstellen  $x_0$  bis  $x_n$ , ist also das Nullpolynom. Daher ist  $p = q$ .

## 1.3 Varianten

Wird nicht das komplette Polynom, sondern nur der Wert an einer Stelle  $t$  gesucht, verwendet man das Neville-Schema in Abschnitt 3.

Eine Variante der Interpolationsaufgabe ist die Hermite-Interpolation, wo neben den Funktionswerten an den Knoten auch die Ableitungen vorgegeben sind, und die Spline-Interpolation.

# 2 Interpolationspolynom - Lagrangedarstellung

## 2.1 Konstruktion des Interpolationspolynoms

- ① Sei  $i \in \{0, \dots, n\}$ . Das  $i$ -te Lagrange-Grundpolynom zu den Knoten  $x_0$  bis  $x_n$  ist definiert durch Lagrange-  
Grundpolynom

$$L_i(x) = \prod_{k=0, k \neq i}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k} = \frac{x - x_0}{x_i - x_0} \cdot \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \cdot \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \cdots \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$$

Dann ist

$$L_i(x_k) = \begin{cases} 1 & i = k \\ 0 & i \neq k \end{cases} \quad \text{oder } L_i(x_k) = \delta_{ik}$$

Der Zähler von  $L_i$  hat genau die Nullstellen  $x_k$  mit  $k \neq i$ . Da der Nenner gerade der Zähler an der Stelle  $x = x_i$  ist, hat der gesamte Ausdruck für  $x = x_i$  den Wert 1.

- ② Das Interpolationspolynom ist die Summe der mit den entsprechenden  $y$ -Werten multiplizierten Grundpolynome.

$$p(x) = y_0 L_0(x) + y_1 L_1(x) + \cdots + y_n L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i L_i(x)$$

Denn es ist

$$\begin{aligned} p(x_k) &= y_0 L_0(x_k) + \cdots + y_k L_k(x_k) + \cdots + y_n L_n(x_k) \\ &= y_0 \cdot 0 + \cdots + y_k \cdot 1 + \cdots + y_n \cdot 0 = y_k. \end{aligned}$$

## 2.2 Beispiel

Konstruiere das Interpolationspolynom zu den Daten  $\frac{x_i}{y_i} \left\| \begin{array}{c|c|c} -1 & 0 & 2 \\ \hline 3 & 1 & 3 \end{array} \right.$

- ① Zunächst werden die drei Grundpolynome konstruiert:

$$L_0(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} = \frac{(x - 0)(x - 2)}{(-1 - 0)(-1 - 2)} = \frac{1}{3}(x^2 - 2x)$$

$$L_1(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} = \frac{(x + 1)(x - 2)}{(0 + 1)(0 - 2)} = -\frac{1}{2}(x^2 - x - 2)$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{(x + 1)(x - 0)}{(2 + 1)(2 - 0)} = \frac{1}{6}(x^2 + x)$$

- ② Jetzt wird das Interpolationspolynom daraus zusammengesetzt:

$$\begin{aligned} p(x) &= 3 \cdot L_0(x) + 1 \cdot L_1(x) + 3 \cdot L_2(x) \\ &= (x^2 - 2x) - \frac{1}{2}(x^2 - x - 2) + \frac{1}{2}(x^2 + x) \\ &= x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

## 3 Newtondarstellung und Neville-Algorithmus - Theorie

### 3.1 Konstruktion von Interpolationspolynomen

Hier wird mit den Polynomen  $P_{k,i}$  gerechnet.  $k$  bedeutet, dass die Knoten  $x_k, P_{k,i}, x_{k+1}, x_{k+2}$  usw. benutzt werden, und  $i$  ist der Grad des Polynoms; d.h. es werden die  $i + 1$  Knoten von  $x_k$  bis  $x_{k+i}$  benutzt.

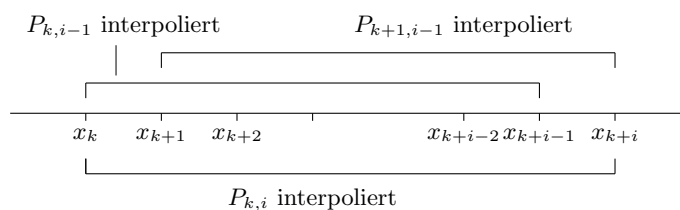
Die konstante Funktion  $P_{k,0} = y_k$  ist das Interpolationspolynom nullten Grades zu dem Wert  $(x_k, y_k)$ .

Induktiv definiert man nun: Sei

- $P_{k,i-1}(x)$  das Interpolationspolynom  $(i-1)$ -sten Grades zu den  $i$  Daten  $(x_k, y_k)$  bis  $(x_{k+i-1}, y_{k+i-1})$
- $P_{k+1,i-1}(x)$  das Interpolationspolynom  $(i-1)$ -sten Grades zu den  $i$  Daten  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  bis  $(x_{k+i}, y_{k+i})$

Dann hat  $P_{k,i}(x)$ , das Interpolationspolynom  $i$ -ten Grades zu den Daten  $(x_k, y_k)$  bis  $(x_{k+i}, y_{k+i})$ , die Gestalt

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x) &= \frac{x_{k+i} - x}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x) + \frac{x - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x) \\ &= \frac{1}{x_{k+i} - x_k} ((x_{k+i} - x) P_{k,i-1} - (x_k - x) P_{k+1,i-1}) \quad (*) \end{aligned} \quad \text{Gleichung(*)}$$



### Beweis

- $P_{k,i}$  ist offenbar ein Polynom  $i$ -ten Grades.
- $P_{k,i}$  hat bei  $x_k$  den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_k) &= \frac{x_{k+i} - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_k) + \frac{x_k - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_k) \\ &= P_{k,i-1}(x_k) = y_k \end{aligned}$$

- $P_{k,i}$  hat bei  $x_{k+i}$  den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_{k+i}) &= \frac{x_{k+i} - x_{k+i}}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_{k+i}) + \frac{x_{k+i} - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_{k+i}) \\ &= P_{k+1,i-1}(x_{k+i}) = y_{k+i} \end{aligned}$$

- $P_{k,i}$  hat auch den Stellen  $x_j$  mit  $k < j < k+i$  den richtigen Wert:

$$\begin{aligned} P_{k,i}(x_j) &= \frac{x_{k+i} - x_j}{x_{k+i} - x_k} P_{k,i-1}(x_j) + \frac{x_j - x_k}{x_{k+i} - x_k} P_{k+1,i-1}(x_j) \\ &= \frac{x_{k+i} - x_j}{x_{k+i} - x_k} y_j + \frac{x_j - x_k}{x_{k+i} - x_k} y_j = y_j. \end{aligned}$$

### 3.2 Interpolationspolynom

Benutzt man schließlich alle Knoten, erhält man:

Das Polynom  $P_{0,n}$  ist das Interpolationspolynom zu den Werten  $(x_0, y_0)$  bis  $(x_n, y_n)$ .

### 3.3 Neville-Algorithmus

Beim Neville-Algorithmus wird für einen festen Wert  $t$  das Interpolationspolynom mit Hilfe der Rekursionsgleichung (\*) bestimmt. Mit  $p_{k,j} = P_{k,j}(t)$  ist  $p_{0,i} = y_i$  und die weiteren Werte berechnen sich als

$$p_{k,i} = \frac{1}{x_{k+i} - x_k} ((x_{k+i} - t)p_{k,i-1} - (x_k - t)p_{k+1,i-1})$$

Zum Schluss ist  $p_{0,n}$  der Wert des Interpolationspolynoms bei  $x = t$ .

Der Algorithmus ist auf S. 8 beschrieben.

### 3.4 Newton-Darstellung

Die Newton-Darstellung benötigt etwas mehr Theorie. Es beruht auf folgender Darstellung des Interpolationspolynoms:

$$\begin{aligned} p(x) = & \alpha_0 \\ & + \alpha_1(x - x_0) \\ & + \alpha_2(x - x_0)(x - x_1) \\ & \vdots \\ & + \alpha_n(x - x_0) \cdots (x - x_{n-1}) \quad (**) \end{aligned} \quad \text{Gleichung(**)}$$

Jetzt wird  $\alpha_0$  so bestimmt, dass  $p(x_0) = y_0$  ist: man erhält direkt  $\alpha_0 = y_0$ .

Setzt man den so bestimmten Wert von  $\alpha_0$  und  $x = x_1$  ein, erhält man aus  $p(x_1) = y_1$  eine eindeutige Bedingung für  $\alpha_1$ , da alle weiteren Summanden einen Faktor  $(x - x_1)$  enthalten.

Sind  $\alpha_0$  und  $\alpha_1$  bestimmt, erhält man durch Einsetzen von  $x = x_2$  mit  $p(x_2) = y_2$  eine Gleichung für  $\alpha_2$  u.s.w. So bekommt man schließlich rekursiv alle  $\alpha_k$ .

Damit kann man im Prinzip das Interpolationspolynom berechnen. Da man hierbei aber viele Polynome auswerten muss, werden die  $\alpha_k$  auf einem anderen Weg bestimmt:

Dazu bemerkt man, dass die  $\alpha_k$  die Leitkoeffizienten der Interpolationspolynome zu den Stellen  $x_0, x_1, \dots, x_k$  sind.

Um diese  $\alpha_k$  zu bestimmen, wertet man die Gleichung (\*) noch einmal aus: ist  $p_{k,j}$  der Leitkoeffizient von  $P_{k,j}$ , so erhält man

$$p_{k,i} = \frac{p_{k+1,i-1} - p_{k,i-1}}{x_{k+i} - x_k}.$$

Damit kann man die Werte  $\alpha_k = p_{0,k}$  bestimmen und erhält das Interpolationspolynom aus Gleichung (\*\*).

### 3.5 Dividierte Differenzen

Die übliche Schreibweise für die  $p_{i,k}$  ist die als dividierten Differenzen:

Dabei verwendet man die Abkürzungen

$y[x_k] := y_k = p_{k,0}$  (das sind die Funktionswerte)

$$y[x_k, x_{k+1}] = \frac{y[x_{k+1}] - y[x_k]}{x_{k+1} - x_k} = p_{k,1}$$

$$y[x_k, x_{k+1}, x_{k+2}] = \frac{y[x_{k+1}, x_{k+2}] - y[x_k, x_{k+1}]}{x_{k+2} - x_k} = p_{k,2}$$

und allgemein

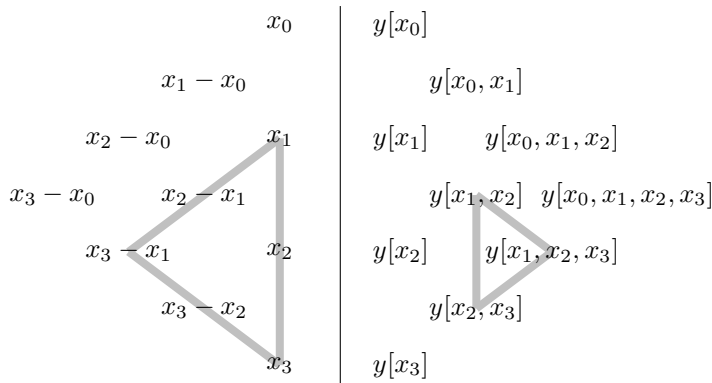
$$y[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}, x_{k+i}] = \frac{y[x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}, x_{k+i}] - y[x_k, x_{k+1}, \dots, x_{k+i-1}]}{x_{k+i} - x_k} = p_{k,i}$$

Dividierte  
Differenzen  
 $y[\dots]$

## 4 Durchführung des Newton-Verfahrens

### 4.1 Algorithmus

- ① Schreibe die Knoten  $x_i$  und entsprechenden  $y$ -Werte  $y_i$  in zwei Spalten.
- ② Fülle zunächst die linke Seite aus: Der Wert eines Eintrags ist die Differenz der beiden diagonal erreichbaren  $x$ -Werte.
- ③ Die rechte Seite wird so ausgefüllt, dass der Wert eines Eintrags die Differenz der Einträge in der Spalte davor ist, geteilt durch den entsprechenden Eintrag der linken Seite.



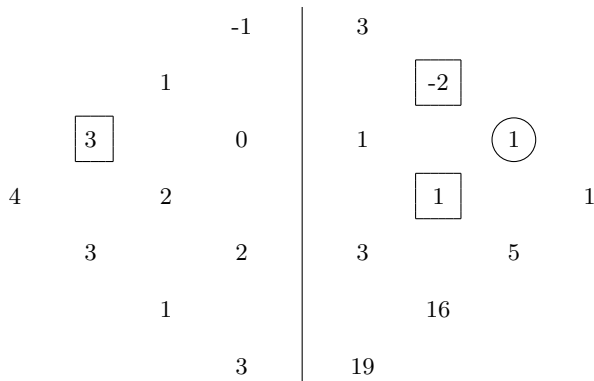
Zum Beispiel ist  $y[x_1, x_2, x_3] = \frac{y[x_2, x_3] - y[x_2, x_1]}{x_3 - x_1}$ .

④ die obere Diagonale der rechten Seite enthält die  $\alpha$ -Werte des Interpolationspolynoms:  $\alpha_0 = y[x_0]$ ,  $\alpha_1 = y[x_0, x_1]$  usw.

⑤ Daraus erhält man

$$p(x) = y[x_0] + y[x_0, x_1](x - x_0) + y[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + y[x_0, x_1, x_2, x_3](x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

**Beispiel 1:** Das Interpolationspolynom zu den Daten  $\frac{x_i}{y_i} \parallel \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & 0 & 2 & 3 \\ \hline 3 & 1 & 3 & 19 \\ \hline \end{array}$



Dabei entsteht z.B. die Zahl im Kreis durch die Zahlen in den Quadraten:

$$\frac{1 - (-2)}{3} = 1.$$

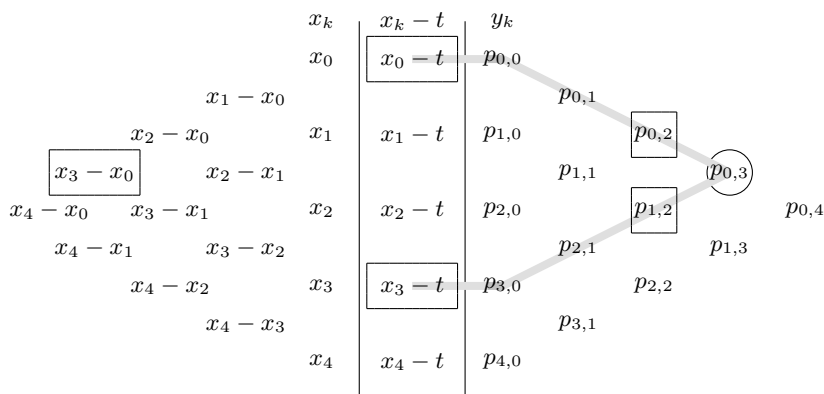
Damit wird

$$p(x) = 3 - 2(x + 1) + 1 \cdot x(x + 1) + 1(x - 2)x(x + 1) = x^3 - 3x + 1.$$

## 5 Durchführung des Neville-Verfahrens

Das Neville-Verfahren dient zur Ermittlung des Wertes des Interpolationspolynoms zu den Daten  $(x_0, y_0)$  bis  $(x_n, y_n)$  an der Stelle  $x = t$ .

### 5.1 Algorithmus



① Zunächst werden die Ausgangsdaten in drei Spalten geschrieben: links stehen die  $x_k$ , daneben die Differenzen  $x_k - t$  und rechts die  $y_k = p_{k,0}$ .

② Genau wie beim Newton-Verfahren werden links die Differenzen der  $x$ -Werte notiert.

Wenn man will, kann man wegen  $(x_i - t) - (x_k - t) = x_i - x_k$  die Spalte mit den  $x_i$  auch weglassen und die Differenzen aus der mittleren Spalte berechnen.

③ Das Ausfüllen der rechten Seite geht spaltenweise vor sich:

$$p_{k,i} = \frac{1}{x_{k+i} - x_k} ((x_{k+i} - x)p_{k,i-1} - (x_k - x)p_{k+1,i-1})$$

Die beteiligten Größen sind im Beispiel gekennzeichnet: Die Zahl im Kreis entsteht, indem die Zahlen in den Rechtecken über Kreuz multipliziert werden. Dann wird die Differenz (genau andersherum als bei einer  $2 \times 2$ -Determinante) durch die Zahl ganz links dividiert.

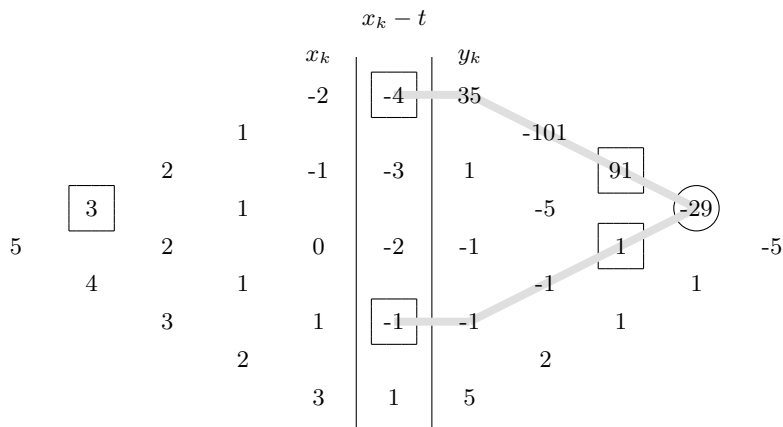
④ Der Wert des Interpolationspolynoms bei  $x = t$  ist dann  $p_{0,n}$ , die Zahl ganz rechts.



**Beispiel 1:** Gesucht ist der Wert des Interpolationspolynoms zu den Daten

$x_i$	-2	-1	0	1	3
$y_i$	35	1	-1	-1	5

an der Stelle  $t = 2$ .



Wie oben setzt sich der Wert im Kreis aus den Zahlen im Rechteck zusammen:

$$\frac{91 \cdot (-1) - 1 \cdot (-4)}{3} = 29.$$

Damit hat das Interpolationspolynom bei  $t = 2$  der Wert  $p(2) = -5$ .

## 6 Fehlerabschätzung

### 6.1 Definition: Interpolationsfehler

Gegeben sind eine Funktion  $f$ , die  $n + 1$  Knoten  $x_0$  bis  $x_n$  und das Interpolationspolynom  $p$  zu diesen Daten  $(x_i, f(x_i))$ .  
 Wie groß ist der Interpolationsfehler  $p(x) - f(x)$ ? Wie groß ist das Maximum des Betrages dieser Differenz?

Interpolationsfehler

Zur Beantwortung dieser Frage benötigt man diese einleuchtende Tatsache:

#### Hilfssatz

Sei  $a \neq b$  und  $g(a) = g(b)$ .

Dann gibt es (mindestens) eine Stelle  $x_0 \in [a, b]$  mit  $g'(x_0) = 0$ .

### 6.2 Folgerung

Hat  $g$  die  $n + 1$  Nullstellen  $x_0$  bis  $x_n$  (der Größe nach geordnet), so hat  $g^{(n+1)}$  (mindestens) eine Nullstelle  $z \in [x_0, x_n]$ .

**Bemerkung**

Dies gilt auch bei mehrfachen Nullstellen: hat eine Funktion  $f$  in  $x = k$  eine  $m + 1$ -fache Nullstelle, dann hat die  $m$ -te Ableitung von  $f$  immer noch eine Nullstelle in  $x_k$ .

**Beweis:**

Induktiv folgt mit  $g(x_0) = g(x_1) = \dots = g(x_n)$ , dass  $g'$  jeweils zwischen den Nullstellen von  $g$   $n$  Nullstellen haben muss, und dazwischen liegen  $n - 1$  Nullstellen von  $g''$  usw. Die Behauptung folgt jetzt induktiv.

**6.3 Definition und Eigenschaften**

(i) Das Knotenpolynom  $\Omega$  ist definiert durch

$$\Omega(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{i=0}^n (x - x_i).$$

Knoten-  
polynom  
 $\Omega$

(ii) Offensichtlich gilt  $\Omega(x) = 0 \Leftrightarrow x \in \{x_0, \dots, x_n\}$ .

(iii) Da  $\Omega$  den Grad  $n + 1$  hat und normiert ist (der Vorfaktor von  $x^{n+1}$  ist eins), ist die  $(n + 1)$ ste Ableitung von  $\Omega$  konstant gleich  $(n + 1)!$ .

**6.4 Abschätzung des Interpolationsfehlers**

Zu den Knoten  $x_0 < \dots < x_n$  gibt es eine Stelle  $z \in [x_0, x_n]$  mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!} \Omega(x).$$

Hinweis:  $x \in [x_0, x_n]$  ist nicht erforderlich.

Beweis:

Ist  $x$  ein Knoten, so ist der Fehler Null und die Behauptung gilt.

Ist  $x$  kein Knoten, so ist  $\Omega(x) \neq 0$ . Daher gibt es eine reelle (von  $x$  abhängige Zahl)  $C$  mit

$$f(x) - p(x) = C \cdot \Omega(x).$$

Betrachte nun die Funktion

$$g(t) = f(t) - p(t) - C \cdot \Omega(t).$$

Dann hat  $g$  in allen Knoten eine Nullstelle (insgesamt  $n + 1$ ). Also gibt es eine Zahl  $z \in [x_0, x_n]$  mit  $g^{(n+1)}(z) = 0$ . Das heißt

$$\begin{aligned} 0 &= g^{(n+1)}(z) = f^{(n+1)}(z) - \underbrace{p^{(n+1)}(z)}_{=0} - C \underbrace{\Omega^{(n+1)}(z)}_{=(n+1)!} \\ \Rightarrow C &= \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n + 1)!}. \end{aligned}$$

Daher ist

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!} \Omega(x).$$

**Beispiel 1:** Die Werte von  $f(x) = \sin x$  werden durch ein Interpolationspolynom  $p$  approximiert. Dabei sind die Knoten  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{\pi}{6}$ ,  $x_2 = \frac{\pi}{3}$  und  $x_3 = \frac{\pi}{2}$  vorgegeben. Wie groß kann der Interpolationsfehler  $\sin x - p(x)$  für  $x \in [x_1, x_2]$  werden?

Mit  $n = 4$  und  $f(x) = \sin x$  ist  $f^{(4)}(x) = \sin x$  und daher  $0 \leq f^{(4)}(\xi) \leq 1$ .

Es ist  $\Omega(x) = (x-0)(x-\frac{\pi}{6})(x-\frac{\pi}{3})(x-\frac{\pi}{2})$ . Für  $x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$  ist  $\Omega(x) \geq 0$ , da genau zwei negative Faktoren auftreten. Weiter ist hier

$$\Omega(x) \leq \frac{\pi}{3} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi^4}{324}$$

Damit wird

$$\frac{0}{4!} \cdot 0 \leq \sin x - p(x) \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{\pi^4}{324} \approx 0.013$$

In vielen Fällen kann man nur den Betrag des Interpolationsfehlers abschätzen. Hier erhält man dann

$$|\sin(x) - p(x)| \leq 0.013 \quad \text{für } x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}].$$

Andererseits kann man noch genauer abschätzen:  $\Omega$  ist ein Polynom vierten Grades und hat daher zwischen den vier Nullstellen drei relative Extrema. Da alle Knoten symmetrisch zu  $\frac{\pi}{4}$  liegen, muss  $\Omega$  dort ein Extremum haben. Daher ist im Intervall  $[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}]$

$$0 \leq \Omega(x) \leq \Omega(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{12} \cdot \frac{\pi}{4} = \frac{\pi^4}{2304}.$$

Damit folgt für den Interpolationsfehler

$$0 \leq \sin(x) - p(x) \leq \frac{\pi^4}{24 \cdot 2304} \approx 0.00177$$

Die Abweichung ist also kleiner als  $\frac{1}{500}$ .

## 7 Hermite-Interpolation

### 7.1 Hermite-Interpolationsaufgabe

Gelegentlich ist dies Problem so definiert, dass an jedem Knoten Funktionswert und (erste) Ableitung vorgegeben werden. Hier wird eine etwas allgemeinere Aufgabenstellung behandelt.

Hermite-  
Interpolations-  
aufgabe

Bei der Hermite-Interpolation wird ein Polynom  $p$  bestimmt, das an den Knoten nicht nur vorgegebene Funktionswerte, sondern möglicherweise auch vorgegebene Ableitungen hat. Die Ordnung der Ableitungen an den Knoten kann verschieden sein. Allerdings muss, wenn die  $k$ -te Ableitung an einer Stelle  $x$  vorgegeben wird, auch der Funktionswert  $p(x)$  und alle Ableitungen niedrigerer Ordnung  $p'(x)$  bis  $p^{(k-1)}(x)$  vorgegeben werden.

### 7.2 Algorithmus

Hat man bei der Interpolation einer Funktion  $f$  zwei  $x$ -Werte als  $x_1$  und  $x_2 = x_1 + h$ , so ist  $y[x_1, x_2] = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ . Strebt  $h$  gegen Null, dann konvergiert die rechte Seite gegen  $f'(x)$ . Mit Taylorentwicklung lässt sich nachweisen, dass in einer entsprechenden Situation mit drei gleichen  $x$ -Werten der entsprechende Teil des Newton-Schemas so aussieht:

		$x_0$	$f(x_0)$			Ausfüllen des Schemas
	0			$f'(x_0)$		
0		$x_0$	$f(x_0)$	$\frac{1}{2}f''(x_0)$		
	0			$f'(x_0)$		
		$x_0$	$f(x_0)$			

Im allgemeinen gehört zu  $k$  gleichen  $x$ -Werten in der ersten Spalte auf der rechten Seite  $k$  mal  $p(x)$ , daneben  $k - 1$  mal  $p'(x)$ ,  $k - 2$  mal  $\frac{1}{2!}p''(x)$  u.s.w bis einmal  $\frac{1}{k!}p^{(k)}(x)$ .

Das Interpolationspolynom wird aus den Werten der oberen Diagonalen der rechten Seite genauso wie bei der Newtondarstellung bestimmt. Neu ist, dass jetzt auch Potenzen von Faktoren  $(x - x_k)$  vorkommen.

**Beispiel 1:** Gesucht ist ein Polynom  $p$  mit  $p(1) = -5$ ,  $p'(1) = -13$ ,  $p''(1) = -16$ ,  $p'''(1) = 24$ ,  $p(2) = -16$  und  $p'(2) = 8$ .

Da dies 6 Bedingungen sind, sucht man ein Interpolationspolynom fünften Grades.

Zunächst werden die Werte in das Schema eingetragen:



berechnen.

$$L_1(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x+3)(x-1)(x-3)}{(-1+3)(-1-1)(-1-3)}$$

Der Zähler ist  $(x-1)(x^2-9) = x^3 - x^2 - 9x + 9$ , der Nenner ist der Zähler bei  $x = -1$ , also  $-1 - 1 + 9 + 9 = 16$ . Also ist  $L_1(x) = \frac{1}{16}(x^3 - x^2 - 9x + 9)$ .

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-x_0)(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x+3)(x+1)(x-3)}{(1+3)(1+1)(1-3)} \\ &= \frac{(x^2-9)(x+1)}{-16} = -\frac{1}{16}(x^3 + x^2 - 9x - 9) \end{aligned}$$

Damit ist das Interpolationspolynom

$$\begin{aligned} p(x) &= 16 \cdot L_1(x) + 32 \cdot L_2(x) = 1 \cdot (x^3 - x^2 - 9x + 9) - 2 \cdot (x^3 + x^2 - 9x - 9) \\ &= -x^3 - 3x^2 + 9x + 27 \end{aligned}$$

**Beispiel 2:** Wie sieht das allgemeine Interpolationspolynom zu den Knoten  $a-h$ ,  $a$  und  $a+h$ ,  $h \neq 0$ , in der Lagrange-Darstellung aus?

Zunächst wird das Problem für  $a = 0$  gelöst: Mit  $x_0 = -h$ ,  $x_1 = x$  und  $x_2 = +h$  erhält man

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{x(x-h)}{(-h)(-2h)} = \frac{1}{2h^2}(x^2 - hx) \\ L_1(x) &= \frac{(x+h)(x-h)}{h(-h)} = \frac{-1}{h^2}(x^2 - h^2) \\ L_2(x) &= \frac{(x+h)x}{h \cdot 2} = \frac{1}{2h^2}(x^2 + hx) \end{aligned}$$

Damit ist

$$p(x) = \frac{1}{2h^2}(y_0 \cdot (x^2 - hx) - 2y_1 \cdot (x^2 - h^2) + y_2 \cdot (x^2 + hx)).$$

Die Lösung des allgemeinen Problems erhält man jetzt, indem man  $x$  durch  $(x-a)$  ersetzt:

$$p(x) = \frac{1}{2h^2} \left( y_0 \cdot ((x-a)^2 - h(x-a)) - 2y_1 \cdot ((x-a)^2 - h^2) + y_2 \cdot ((x-a)^2 + h(x-a)) \right)$$

**Beispiel 3:** Dasselbe Problem (Beispiel 2) mit der Newtondarstellung

$a - h$	$y_0$
$h$	$\frac{y_1 - y_0}{h}$
$2h$	$y_1$
$a$	$\frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}$
$h$	$\frac{y_2 - y_1}{h}$
$a + h$	$y_2$

Man erhält damit

$$p(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - (a - h)) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - a)(x - (a - h)).$$

Das ist natürlich dasselbe Polynom wie oben.

**Beispiel 4:**

$x_i$	-3	-1	0	2	3
$y_i$	49	-3	1	9	61

 Gesucht ist das Interpolationspolynom zu diesen Daten in der Newton-Darstellung und der Wert für  $x = 1$ .

				-3	49				
				2		-26			
				3	-1	-3	10		
			5	3	1		4	-2	
6			4	3	2	0	1	0	1
				3	2	2	9	16	
				1	3		52		
				3	61				

Daher ist

$$p(x) = 9 - 26(x + 3) + 10(x + 3)(x + 1) - 2(x + 3)(x + 1)x + 1 \cdot (x + 3)(x + 1)x(x - 2) = \dots = x^4 - 3x^2 + 2x + 1.$$

Um das Polynom mit möglichst wenig Mühe auszuwerten, schreibt man es ähnlich wie beim Horner Schema:

$$p(x) = (((1 \cdot (x - 2) - 2)x + 10)(x + 1) - 26)(x + 3) + 9$$

also

$$p(1) = (((1 \cdot (-1) - 2) \cdot 1 + 10) \cdot 2 - 26) \cdot 4 + 9 = (14 - 26) \cdot 4 + 49 = -48 + 49 = 1.$$

**Beispiel 5:** Dasselbe Problem mit dem Neville-Schema

Dies gerechnet sieht so aus:

			-3	-4	49					
			2			-55				
		3	-1	-2	-3	25				
	5		1			5	9			
6		3	0	-1	1	5		1		
	4		2			5	-3			
		3	2	1	9	-11				
			1			-43				
			3	2	61					

**Beispiel 6:** Gesucht ist eine Abschätzung für den Interpolationsfehler von  $f(x) = e^{-x}$  auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit den Knoten  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = \frac{3}{8}$  und  $x_2 = 1$ .

Mit  $n = 2$  ist  $f^{(n+1)}(x) = f'''(x) = -e^{-x}$  und  $|f'''(x)| \leq 1$  auf  $[0, 1]$ .

Das Knotenpolynom ist

$$\Omega(x) = x(x - \frac{3}{8})(x - 1) = x^3 - \frac{11}{8}x^2 + \frac{3}{8}x.$$

Um die Größe von  $\Omega$  abzuschätzen beachtete man, dass  $\Omega$  an den Knoten Null ist und offenbar in jedem Teilintervall ein Extremum besitzt.

$$\Omega'(x) = 3x^2 - \frac{11}{4}x + \frac{3}{8} = \quad (p\text{-}q\text{-Formel}) \quad = 3(x - \frac{1}{6})(x - \frac{3}{4})$$

Mit  $\Omega(\frac{1}{6}) = \frac{1}{6} \cdot \frac{-5}{24} \cdot \frac{-5}{6} = \frac{25}{864}$  und  $\Omega(\frac{3}{4}) = \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{8} \cdot \frac{-1}{4} = \frac{-9}{128}$  sieht man, dass  $|\Omega(x)| \leq \frac{9}{128}$  ist.

Daher ist der Interpolationsfehler

$$|e^{-x} - p(x)| \leq \frac{1}{3!} \frac{9}{128} = \frac{3}{256}.$$



**Beispiel 7:** Welches Polynom erfüllt  $p(1) = 2$ ,  $p'(1) = 3$ ,  $p''(1) = 4$ ,  $p(0) = 5$  und  $p'(0) = 6$ ?  
(Hermite-Interpolation)

Folgende Werte werden in das Schema eingetragen:

		0	5			
		0		6		
		0	5			
		1	2			
	0	0		3		
0	0	1	2		2	
	0			3		
		1	2			

Und so sieht dann das fertige Schema aus:

			0	5				
			0		6			
		1	0	5		-9		
	1	1	1		-3		15	
1	1	1	1	2		6		-19
	1	0	0		3		-4	
		0	1	2		2		
		0			3			
			1	2				

Es ist also

$$p(x) = 5 + 6x - 9x^2 + 15x^2(x-1) - 19x^2(x-1)^2 = -19x^4 + 53x^3 - 43x^2 + 6x + 5.$$